Suite de polygones

Lemme — *Une matrice circulante* $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable de valeurs propres les* $P(\omega^k),\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$ *où*

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i \text{ et } \omega = e^{2i\pi/n}$$

DÉMONSTRATION

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Comme J est la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme défini par

$$\begin{cases} f(e_1) = e_n \\ \forall i \in [\![2;n]\!],\ f(e_i) = e_{i-1}. \end{cases}.$$

on en déduit que

$$\forall k \in [\![1;n-1]\!],\ J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Par liberté de la famille $J^k,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1$, l polynôme minimal de J est au moins de degré n, et donc exactement de degré n.

Or $J^n = I_n$. Donc $\pi_J = X^n - 1$.

Le polynôme minimal de J est scindé à racines simples, donc J est diagonalisable de valeurs propres les racines n-èmes de l'unité.

Il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$J = Q \cdot \mathrm{diag}\left(1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\right) \cdot Q^{-1}$$

où $\omega = e^{2i\pi/n}$.

De plus

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} J^k.$$

Donc

$$A = Q \cdot \mathrm{diag}\left(P(1), P(\omega), \ldots, P(\omega^{n-1})\right) \cdot Q^{-1} \text{ où } P = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k.$$

Proposition — *Soit $P_0 = (P_{0,i})_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$ un polygone à n sommets. On définit la suite de polygones $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![1; n]\!],\ P_{k+1,i} = \begin{cases} \frac{P_{k,i}+P_{k,i+1}}{2} & \textit{si } i \leqslant n-1 \\ \frac{P_{k,n}+P_{k,0}}{2} & \textit{si } i = n \end{cases}.$$

Alors toutes les composantes de (P_k) convergent vers

$$g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_{0,i}.$$

DÉMONSTRATION

La relation de récurrence se traduit par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_{k+1} = AP_k$$

où $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \ldots & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Par récurrence immédiate,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_k = A^k P_0.$$

D'après le lemme précédent, les valeurs propres de A sont les $P(\omega^k)$ où

$$P(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}X.$$

Comme les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes, A est diagonalisable : il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = QDQ^{-1}$$

où D est diagonale de coefficients $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\omega^k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Comme les valeurs propres de A sont toutes de module < 1 sauf la valeur propre 1, par continuité de la conjugaison,

$$\lim_{m \to +\infty} A^k = Q\mathrm{diag}\,(1, 0, \ldots, 0)\, Q^{-1}.$$

Donc la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}^n$ vers un point fixe de l'application $X \mapsto AX$ c'est-à-dire un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
Or

$$\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}\,(1, \ldots, 1).$$

Il existe $g \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} P_k = (g, \ldots, g)$.

Enfin on remarque que l'isobarycentre est préservé par la multiplication par A :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{k+1,i} = \frac{1}{n}\left(\frac{P_{k,n} + P_{k,0}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{P_{k,i} + P_{k,i+1}}{2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{k,i}.$$

Donc $g = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} g$ est l'isobarycentre de P_0. $\square$